SESIÓN 8

EXPONENTESY RADICALES

I. CONTENIDOS:

1. Leyes de los exponentes.
2. Exponente cero.
3. Exponente fraccionario.
4. Exponente negativo.
5. Radical.
6. Raíz enésima.
7. Raíces de números positivos y negativos.
8. Leyes de radicales.
9. Número racional e irracional.
10. Simplificación de radicales.
11. Racionalización

II. OBJETIVOS:

Al término de la Sesión, el alumno:

- Comprenderá las leyes de los exponentes.
- Simplificará expresiones que contienen exponentes.
- Obtendrá la raíz enésima de cualquier número, positivo o negativo.
- Comprenderá y aplicará las leyes de los radicales.
- Racionalizará expresiones que contienen radicales

III. PROBLEMATIZACIÓN:

Comenta las preguntas con tu Asesor y selecciona las ideas más significativas.

- ¿Cómo interpretas un exponente negativo?
- Se puede elevar un exponente a la *cero potencia*.
- ¿Cuál es la raíz cuadrada de 25? ¿Cuál es la raíz cuadrada de –25?
- ¿Cómo escribirías de otra forma la expresión X½

IV. TEXTO INFORMATIVO-FORMATIVO:

A. Contesta las siguientes preguntas:

- ¿Qué es una potencia?
- ¿Cuál es la diferencia entre la base y el exponente?
- ¿Cómo se muestra convencionalmente el exponente 1?
- Escribe ejemplos de representación de factores iguales.

1.1. Leyes de los exponentes

Para todo a, b " R, a"0 y todo n, m " R y bases diferentes de 0 para exponentes negativos o cero.

am • an = am + n

(am) n= am • n

(a.b) m =am • bm

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\frac{a}{b}^{n} = \frac{a^{n}}{b^{n}}$$

Expresiones exponenciales.

Potencia: Llamamos potencia de un número al producto de tomarlo como factor tantas veces como queremos es, pues, una multiplicación en la que los factores son siempre el mismo número.

Ejemplo: Exponente

Base $4^3 = 64$ potencia

Base: Al número que tomaremos como factor, o sea, el 4.
Exponente: Al número que nos indica cuantas veces debemos tomar como factor a la base, el exponente es el 3.
Potencia: Al producto obtenido, es decir, el 64.
El ejemplo de 4^3 nos indica que se debe tomar como factor 3 veces al 4, es decir, multiplicar al 4 por si mismo 3 veces.
Ejemplo:

$4^3=4 \times 4 \times 4=64$

Reglas:

a) La potencia de un número positivo siempre es positivo.
Ejemplo:
$(8)^2=64$
$(3)^3=27$

b) La potencia de un número negativo siempre es positivo, si el exponente es entero o par.
Ejemplo:
$(-2)^2=4$
$(-2)^4=16$

c) La potencia de un número negativo es siempre negativo, si el exponente es entero e impar.
Ejemplo:
$(-3)^5=-243$
$(-4)^3=-64$

d) Todo número elevado al exponente uno o primera potencia, nos da el mismo número.
Ejemplo:
$100^1=100$ $5^1=5$ $-8^1=-8$

2.1. Exponente cero

e) Todo número con exponente cero es igual a la unidad.
Ejemplo:

$1000^0=1$ $5031^0=1$ $-3200^0=1$

3.1. Exponente fraccionario.

Los radicales se pueden expresar en forma de exponente fraccionario, donde el exponente de la literal será el numerador y el número de radical será el denominador

$$\sqrt[5]{X^3} = X^{\frac{3}{5}}$$

4.1. Exponente negativo.

g) Para quitar el signo negativo a un exponente, el término se escribe en forma de reciproco
Ejemplo:

X^{-3} cambia a $1/x^3$

$(X+2)^{-3}$ cambia a $1/(X+2)^3$

$(2/3)^{-2}$ cambia a $(3/2)^2$

h) Al sumar expresiones elevadas a una potencia hay que cuidar que sean de la misma base y misma potencia

$X^2+5X^2+3X^2=9X^2$ solo se suman los coeficientes

i) En la multiplicación, se multiplican los signos, se multiplican los coeficientes y se anotan las literales sumando sus exponentes, solo si son de la misma letra

$(-2X^2)(3X^5) = -10X^7$

$(-4X^3Y^2)(-3X^5Y)= 12X^8Y^3$

j) En la división se dividen los signos, se dividen los coeficientes y se anotan las literales restando sus exponentes (de los términos semejantes)

Ejemplo:

$$\frac{-3X^2Y^5}{2XY^2} = -1.5XY^3$$

Siempre numerador menos denominador teniendo cuidado con los signos

k) Potencia

Al expresar un termino elevado a una potencia es igual a multiplicar el signo por si mismo el numero que exprese la potencia, elevar el coeficiente a la potencia indicada y anotar las literales con su exponente multiplicada por la potencia

Ejemplo:

$$(3x^2Y^4)^3 = 3*3*3x^{2*3}Y^{4*3} = 27x^6Y^{12}.$$

Racionalización

La raíz de una expresión algebraica es toda expresión algebraica que elevada a una potencia reproduce la expresión dada.

Así, 2a es raíz cuadrada de $2a^2$ porque $(2a)^2=4a^2$ y -2a también es raíz cuadrada de $4a^2$ porque $(-2a)^2=4a^2$

3x es raíz cúbica de $27x^3$ porque $(3x)^3$=27x3.

Los números que tiene cociente o raíz exacta o periódica de denominan *números racionales,* mientras que los no tiene raíz o cociente exacto se denominan *números irracionales.*

5.1. Radical

El signo de raíz es $\sqrt{}$, llamado signo radical. Debajo de este signo se coloca la cantidad a la cual se extrae la raíz, llamada por eso, cantidad subradical.

6.1. Raíz enésima

El signo $\sqrt{\ }$, lleva un índice que indica la potencia a que hay que elevar la raíz para que reproduzca la cantidad subradical. Por convención el índice 2 se suprime y cuando el signo $\sqrt{\ }$ no lleva índice se entiende que el índice es 2.

$$\sqrt[3]{8x^3}$$

Significa una cantidad que elevada al cubo reproduce la cantidad subradical 8x3; esta raíz es 2x porque (2x)3=8x3.

$$\sqrt[5]{-32a^5}$$

Significa una cantidad que elevada a la quinta potencia reproduce la cantidad subradical -32a5, esta raíz es -2a porque (-2a)5=-32a5.

7.1. Leyes de los radicales.

$$\sqrt[n]{b^n} = b$$

$$\sqrt[n]{ab} = (ab)^{1/n} = a^{1/n} b^{1/n} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$$

"0

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$$

8.1. Condiciones para la simplificación de radicales

Todos los factores con potencias enésimas exactas o múltiplos de n, deben eliminarse del radicando.
El índice del radical debe ser el mínimo posible.
No debe haber fracciones en el radicando, es decir que su denominador debe ser racionalizado.

Multiplicación de radicales

Multiplicación, caso 1.

La operación se efectúa aplicando la ley de radicales B.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

Ejemplo:

$$\left(2\sqrt[3]{4}\right)\left(3\sqrt[3]{16}\right) = (2)(3)\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{16} = 6\sqrt[3]{(4)(16)} = 6\sqrt[3]{64} = 6(4) = 24$$

Multiplicación, caso 2.
La operación se efectúa aprovechando el isomorfismo, con los exponentes racionales y sus leyes para cambiar a radicales con índices iguales.
Ejemplo:

$$\sqrt[3]{5}\sqrt{2} = 5^{1/3} * 2^{1/3} = 5^{2/6} * 2^{3/6} = \sqrt[6]{5^2}\sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{25.8} = \sqrt[6]{200}$$

División de radicales.

División, caso 1.

Esta operación se efectúa usando la ley de radicales C.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\frac{x}{y}=\frac{x^{z}}{y^{z}}$$

y se simplifica usando el teorema.

Ejemplo:

$$\frac{6\sqrt[3]{5}}{2\sqrt[3]{\ }}=\frac{6}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{3}}=3\frac{\sqrt[3]{5*3^{2}}}{3*3^{2}}=3\frac{\sqrt[3]{45}}{3}=\sqrt[3]{45}$$

División, caso 2.

Al igual que en la multiplicación buscamos cambiar a radicales con el mismo índice, usando los exponentes racionales.
Ejemplo:

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}=\frac{4^{11/3}}{2^{1/2}}=\frac{4^{2/6}}{2^{3/6}}=\sqrt[6]{\frac{16}{8}}=\sqrt[6]{2}$$

Racionalización de denominadores.

Racionalizar el denominador. Racionalizar significa reemplazar la expresión por una equivalente sin radical en donde se indique.

$$\sqrt[3]{\frac{9}{2}}=\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{2}}$$

Ley C.
Se busca un factor (z) al que haga que el radicando en el denominador tenga un exponente múltiplo del índice del radical y usando el teorema $\frac{x}{y}=\frac{x^{z}}{y^{z}}$

Adición de radicales.

Se dice que 2 o más radicales son semejantes, cuando tienen el mismo índice y el mismo radicando.
La suma algebraica de radicales se reduce a combinar todos los radicales semejantes en un solo término. Ejemplo:

$$\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{72}$$

Ninguno de estos radicales es semejante, por lo que debemos cambiar su forma y simplificarlos.

$$= \sqrt{9 * 2} + \sqrt{25 * 2} - \sqrt{36 * 2} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$$
$$= (3 + 5 - 6)\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

V. ACTIVIDADES CENTRADAS EN EL APRENDIZAJE:

A. Efectúa los siguientes ejercicios.

a) $4^6 \bullet 4^2$

b) $(2x)\,(2x)^3\,(2x)^{-2}$

c) $ax^3 \bullet bx \bullet cx^4$

d) $\dfrac{6^8}{6^3}$

e) $\dfrac{a^3}{a^{-2}}$

f) $(4^3)^2$

g) $(-3x^2y^2)^4$

h) $\dfrac{(x + 2y)^3\,(2y + x)\,(x + 2)^3}{(x + 2)\,(2y + x)^2\,(x + 2)}$

B. Escribe la raíz principal de las siguientes expresiones.

a) $\sqrt{16}$

b) $\sqrt[3]{-8}$

c) $\sqrt[4]{(-8)^4}$

d) $\sqrt{x^4\;y^2}$

C. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $$\frac{X^{\frac{2}{3}} \quad Y^{\frac{1}{2}}}{X^{\frac{1}{-3}} \quad Y^{\frac{3}{2}}}$$

b) $(16a^2b^4)^{\frac{1}{2}} \, (2^{a-2})$

D. Simplifica los siguientes radicales.

a) $\sqrt[12]{64m^6n^{18}}$

b) $\sqrt[6]{343a^9x^{12}}$

E. Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{5n^2}{3\sqrt{mn}}$

b) $\dfrac{5 + 2\sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}}$

F. Resuelve el Problema Reto: Reducir a su forma más simple.

$2a\sqrt{a^2 + 6a + 9}$

G. Resuelve el Problema Reto: Elimina exponentes negativos y simplifica.

$$\frac{5\,(4x^2yz^{-3})^{-2}}{-3x^{-1}\,(2yz^{-2})^{-3}}$$